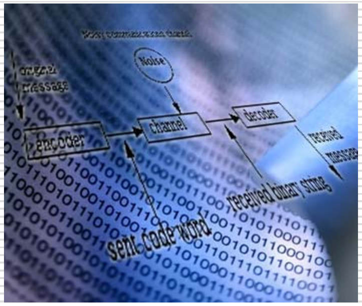
Kapitel 13: Syndromcodierung / Hamming Codes



Ziele des Kapitels

- Lineare Codes
- Zyklische Codes

Parity-Check-Matrix

- Theorem: Die Minimaldistanz eines linearen Codes mit Parity-Check-Matrix H ist gleich der minimalen Anzahl von Spalten in H, die linear abhängig sind

Parity-Check-Matrix

- Beweis: Wenn H insgesamt t linear abhängige Spalten h_i enthält, wobei

$$\sum_{i=1}^{N} c_i h_i = 0$$

- Mit höchstens t verschiedenen $c_i \neq 0$, dann ist $[c_1,\ldots,c_N]$ ein Codewort mit minimalem Gewicht $w = d_{\min}$

Parity-Check-Matrix

ETH

- Umgekehrt, wenn $[c_1,\ldots,c_N]$ ein Codewort mit minimalem Gewicht $w=d_{min}$
- Dann sind die den Symbolen c_i !=0 entsprechenden w Spalten von H linear abhängig

Syndromcodierung

ETH

- Wir betrachten das Problem der Fehlerkorrektur für lineare Codes
- Fehlerkorrektur ist immer komplexer als Fehlerdetektion
- Der allgemeine Aufwand zum Vergleich eines empfangenen Codewortes mit allen möglichen Einträgen ist $O(q^K)$
- Für lineare Codes gibt es ein effizienteres Verfahren in $O(q^{N-K})$
- Dazu verwenden wir folgende Annahme

Syndromcodierung

ETH

- Das Codewort c werde im Kanal durch einen Fehlervektor e in ein Wort $(c+e)$ verfälscht
- Durch Multiplikation mit H erhalten wir das sogenannte Syndrom s, so dass

$$s=(c+e)\cdot H^{\mathrm{T}}=c\cdot H^{\mathrm{T}}+e\cdot H^{\mathrm{T}}=0+e\cdot H^{\mathrm{T}}=e\cdot H^{\mathrm{T}}$$

- Bei Annahme von Gleichverteilung der Codewörter kann Fehlerkorrektur wie folgt erreicht werden:
  - Wir schätzen e aufgrund von s
  - Wir korrigieren das empfangene Codewort durch Subtraktion
- Implementierung mittels einer Tabelle, die jedem der $O(q^{N-K})$ Syndrome ein Fehlermuster minimalen Gewichts zuweist

Syndromcodierung

ETH

- Gegeben: Binärer [5,2] Code mit

$$G=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{I_K}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}}_{A}\qquad H=\left[\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{array}\right]\; n\text{-}k$$

- Auflisten aller möglichen $2^{N-K}=8$ Syndrome

Syndrom	Muster (e)	
000	00000	$w=0$
001	00001	$w=1$
010	00010	$w=1$
011	00011	$w=2$

Jeder Spalte der Matrix H wird ein Fehlervektor zugeordnet bei dem 1 Bit gesetzt ist

Syndromcodierung

Syndrom	Muster (e)	
100	00100	$w=1$
101	01000	$w=1$
110	00110	$w=2$
111	10000	$w=1$

- Prinzip: Minimales Gewicht $w_{\min}$ bezüglich aller mit Syndrom konsistenter Fehlermuster

$r = c + e = 11110$ empfangen

$\rightarrow s = r \cdot H^T = 100 \rightarrow e = 00100$ (aus der Syndromtabelle)

$\rightarrow r - e = 11\ 010 = c \rightarrow a = 11$

Parity-Check Prüfbits

Anmerkungen

- Bei einem Linearcode entsteht dann und nur dann eine nichterkennbare Verfälschung, wenn $w(e) \geq d_{\min}$ ist
- Dann könnte e ein Kanalcodewort sein
- Gilt die Bedingungen zur Mindestdistanz, so ist r ein Kanalcodewort, wenn

$$r \cdot H^T = 0$$

- Sollen alle Fehlermuster korrigierbar sein, deren Distanz $w(e) \leq s$ ist, so kann man die Anzahl der (N-K) erforderlichen Kontrollbits berechnen

Anzahl von Kontrollbits

- Wir berechnen die Mindestanzahl der erforderlichen Kontrollbits
- Gegeben sei ein Kanalcode mit Codewörtern $[c_1,\ldots,c_N]$ der Länge N, sowie $d_{\min}$
- Aufgrund von Verfälschungen gibt es

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

- Binärfolgen der Distanz i
- Davon sind nur 2^K Folgen Kanalwörter mit Distanz $\geq d_{min}$

Anzahl von Kontrollbits

- Damit alle Fehler $\leq s$ korrigierbar sind, muss gelten

$$2^N \geq 2^K\left(1+\binom{N}{1}+\binom{N}{2}\cdots+\binom{N}{r}\right)$$

- Damit ist K berechenbar
- Es gilt:

$$2^K \geq \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor} \binom{N}{i}$$

Anzahl von Kontrollbits

ETH

- Kanalcode mit $N=7$ und $d_{min}=3$. Berechnen K
- Ein Fehler korrigierbar, zwei erkennbar

$$2^7 \geq 2^K\left(1+\binom{7}{1}\right)$$

$$2^7 \geq 2^3 \cdot 2^4$$

$$K \leq 4$$

- Das heisst bei 4 Nutzbits erhält man 16 Quellcodewörter sowie 3 Kontrollbits pro Wort

Hamming Codes

ETH

- Eine bedeutende Klasse linearer Codes sind die Hamming Codes
- Für jedes $r > 1$ gibt es einen Code der Länge $N=2^r-1$ mit $K=N-r$ Informationsbits und $d_{min}=3$
- Je grösser K, desto näher an *1* ist die Rate
- Jeder Hamming-Code kann einen Fehler pro Block korrigieren
- Je länger der Block, desto kleiner die tolerierbare Fehlerwahrscheinlichkeit des Kanals
- Beliebt bei kleinen Fehlerraten

Hamming Codes

ETH

- Die $(r \times (2^r-1))$ Parity-Check-Matrix kann einfach konstruiert werden
- Sie besteht aus allen 2^r-1 vom Nullvektor verschiedenen Spalten
- Die Reihenfolge der Spalten ist damit noch nicht festgelegt
- Die Minimaldistanz folgt aus der Tatsache, dass sich keine zwei Spalten von H zu Null addieren, da sie verschieden sind
- Es gibt jedoch viele Spaltentripel, die linear abhängig sind

Praktische Konstruktion

ETH

- Damit kann man einen Hamming-Code wie folgt konstruieren:
  1. Lege r und damit N fest, z. B. $r=3$, $N=7$
  2. Schreibe alle 2^r-1 vom 0-Vektor verschiedenen Spalten in H
  3. Ordne sie strukturell gemäss $H=[-A^T|I_{N-K}]$
  4. Extrahiere A^T aus $H=[-A^T|I_{N-K}]$
  5. Konstruiere die Generatormatrix $G=[I_K|A]$

Dies ist offensichtlich eine sehr einfache Methode, einen fehlerkorrigierenden Code zu konstruieren

Hamming - Code

- [7,4] das heisst $r=3$ und $N=7$
- $\mathrm{Dim}(H)=r\mathrm{x}(2^r-1)=3\mathrm{x}7$ Matrix

$$H=\left[-A^T \mid I_{N-K}\right]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&1&0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$-A^T$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Hamming - Code

$$G=\left[I_K \mid A\right]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{array}\right]$$

Duale Hamming Codes

- Interessante Codes erhält man, wenn man die Parity-Check-Matrix eines Codes zur Generatormatrix eines weiteren Codes macht
- Definition: Ein Code *C'* ist dual zu einem Code *C*, wenn die Generatormatrix von *C'* eine Parity-Check-Matrix von *C* ist
- Im dualen Hamming-Code ist die Anzahl der Informationsbits kleiner und die Minimaldistanz sehr gross
- Es gilt für den dualen Hamming-Code

$$d_{\min}=2^{r-1}$$