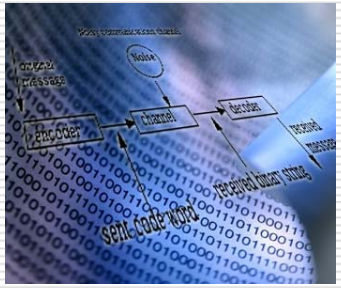
Kapitel 14: Polynomevaluationscodes



Ziele des Kapitels

ETH

- Polynomevaluationscodes

Polynomevaluationscodes

ETH

- ***Codierung:***

  Fasse K Informationssymbole über $GF(q)$ als Koeffizienten eines Polynoms vom Grad $K - 1$ auf

  Codewort erhält man durch Auswertung des Polynoms an N fixen und bekannten Stellen $x_1,\ldots,x_N$

  Damit dies möglich ist, muss $q \geq N$ erfüllt sein

Polynomevaluationscodes

ETH

- Beispiel:
  - Auf Polynomevaluation basierender linearer [5,2]-Code C
  - Körper $GF(5)$
  - Auswertungsstellen $x_i := i - 1$ ($i \in \{1,\ldots,5\}$)

Informations-vektor

Assoziiertes Polynom

Codewort

$a_0 \| a_1$	$a(x)$	$a(0) \| a(1) \| a(2) \| a(3) \| a(4)$
00	0	00000
01	x	01234
02	$2x$	02413
03	$3x$	03142
04	$4x$	04321
10	1	11111
11	$x+1$	12340
12	$2x+1$	13024
13	$3x+1$	14203
14	$4x+1$	10432
20	2	22222
21	$x+2$	23401
22	$2x+2$	24130
23	$3x+2$	20314
24	$4x+2$	21043
30	3	33333
31	$x+3$	34012
32	$2x+3$	30241
33	$3x+3$	31420
34	$4x+3$	32104
40	4	44444
41	$x+4$	40123
42	$2x+4$	41302
43	$3x+4$	42031
44	$4x+4$	43210

Polynomevaluationscodes

ETH

- Beispiel (Fortsetzung):
  - Dazugehörige Generatormatrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

  - Systematische Generatormatrix

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

  - Parity-Check Matrix

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_0 \| a_1$	$a(x)$	$a(0) \| a(1) \| a(2) \| a(3) \| a(4)$
00	0	00000
01	x	01234
02	$2x$	02413
03	$3x$	03142
04	$4x$	04321
10	1	11111
11	$x+1$	12340
12	$2x+1$	13024
13	$3x+1$	14203
14	$4x+1$	10432
20	2	22222
21	$x+2$	23401
22	$2x+2$	24130
23	$3x+2$	20314
24	$4x+2$	21043
30	3	33333
31	$x+3$	34012
32	$2x+3$	30241
33	$3x+3$	31420
34	$4x+3$	32104
40	4	44444
41	$x+4$	40123
42	$2x+4$	41302
43	$3x+4$	42031
44	$4x+4$	43210

Polynomevaluationscodes

ETH

- Singleton Bound: Die Minimaldistanz eines linearen $[N, K]$-Codes über $GF(q)$ ist höchstens $N - K + 1$

  Beweisidee: jede Menge von $N - K + 1$ Spaltenvektoren der $((N - K) \times N)$-Parity-Check-Matrix eines $[N, K]$-Codes ist linear abhängig

- Codes basierend auf Polynomevaluation erreichen diese obere Schranke für $q \geq N$

Polynomevaluationscodes

ETH

- Polynomeigenschaft: Jedes Polynom vom Grad d lässt sich eindeutig aus den Polynomwerten an beliebigen $d + 1$ Stützstellen interpolieren (z.B. durch Lagrange-Interpolation)

- Das Polynom vom Grad $K - 1$ und damit der Informationsvektor kann folglich aus beliebigen K Stellen des Codewortes eindeutig rekonstruiert werden

- Zwei verschiedene Codewörter können also höchstens in $K - 1$ Positionen übereinstimmen, und die Minimaldistanz ist also mindestens $d_{min} = N - (K - 1) = N - K + 1$

Polynomevaluationscodes

ETH

- Ein Polynomevaluationscode besitzt also immer maximale Minimaldistanz
- Effiziente Decodierung nach Algorithmus von Welch und Berlekamp (1983)

Polynomevaluationscodes

- Zur Konstruktion eines Codes mit grosser Minimaldistanz setzt die Konstruktion einen grossen Körper voraus
- Erweiterung auf $GF(2)$ durch Gleichsetzen von einem $[n, k]$-Code über $GF(2^r)$ mit einem binären $[rn, rk]$-Code
- Für jedes $r > 0$, $N \leq r2^r$ und $K \leq N - r$ gibt es einen linearen binären $[N, K]$-Code mit Minimaldistanz mindestens $n - k + 1$, wobei $n = \text{floor}(N/r)$ und $k = \text{ceil}(K/r)$

Polynomevaluationscodes

- Für jedes $r > 0$, $N \leq r2^r$ und $K \leq N - r$ gibt es einen linearen binären $[N, K]$-Code mit Minimaldistanz mindestens $n - k + 1$, wobei $n = \text{floor}(N/r)$ und $k = \text{ceil}(K/r)$
- Beispiel: Mindestens erreichbare Minimaldistanz für linearen binären [1000,537]-Code
  - kleinstes ganzzahlige r mit $N \leq r2^r$ ist 8
  - erreichbare Minimaldistanz:
    $\text{floor}(N/r) - \text{ceil}(K/r) + 1 =$
    $\text{floor}(1000/8) - ceil(537/8) + 1 =$
    $125 - 68 + 1 = 58$

Weitere Informationen

- Nicht prüfungsrelevant:
  - Codes basierend auf Polynommultiplikation
  - Reed-Solomon Codes
  - Fehlerbuendel, Interleaving
  - CD-Codierung