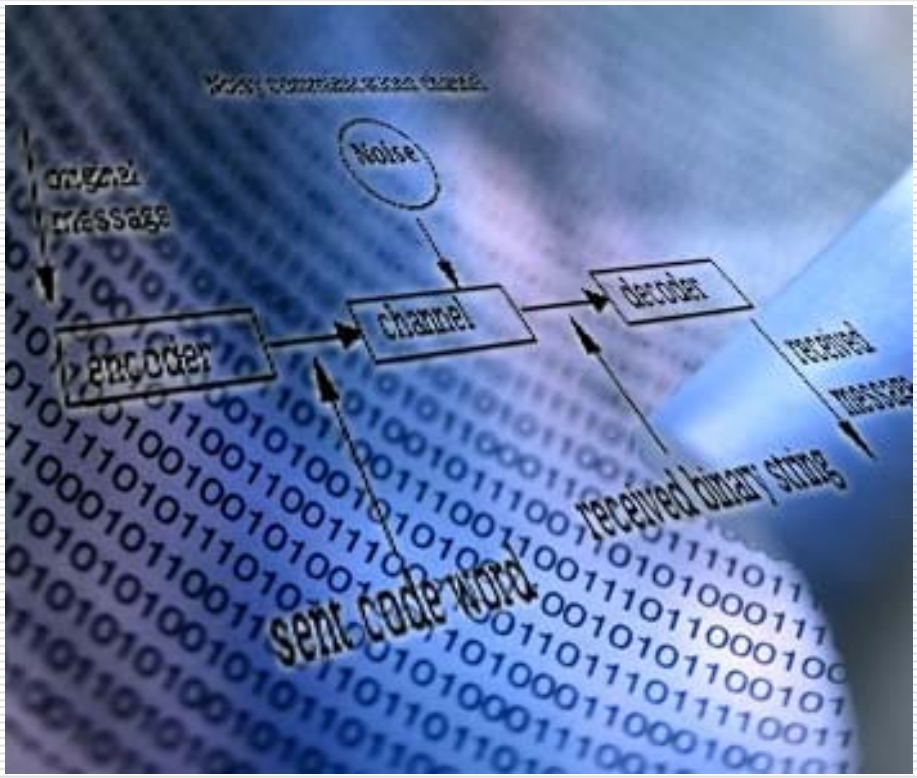
Kapitel 3: Entropie



Motivation

- Wir erinnern uns: Um eine Zufallsvariable mit *N* verschiedenen, gleichwahrscheinlichen Zuständen binär zu codieren, benötigen wir

$$\lceil \log_2 N \rceil \text{Bits} \qquad \lceil -\log_2 p_N \rceil \text{Bits}$$

- Die Information steht in direktem Zusammenhang mit der Unsicherheit (Entropie) über den Ausgang eines Zufallsexperimentes
- Wie kann diese Unsicherheit quantitativ erfasst werden?
- Statt einer direkten Definition stellen wir eine Reihe von Anforderungen auf

Anforderungen I

- Die Unsicherheit über ein Experiment soll unabhängig von der Nomenklatur sein und nur von den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse abhängen

Beispiel: Beim fairen Münzwurf soll die Unsicherheit gleich gross sein, egal ob wir die Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ oder „0“ und „1“ nennen

Anforderungen II

- Die Unsicherheit über ein Experiment soll unabhängig von der Nomenklatur sein und nur von den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse abhängen

  - Die Unsicherheit ist eine Funktion *H*, welche jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung eine reelle Zahl zu-ordnet, im Falle endlicher Zufallsexperimente also jeder Liste $[p_1,..,p_L]$ sich zu 1 summierender Zahlen
  - Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir daher eine solche Liste mit $L \geq 1$ Elementen als geordnet auffassen, also

$$p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_L$$

Anforderungen III

- Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit 0 sollen keinen Einfluss haben:

$$H([p_1,...,p_L]) = H([p_1,...,p_L,0])$$

- Allgemein soll gelten, dass für Experimente mit gleichwahrscheinlichen Ereignissen die Entropie mit der Anzahl der möglichen Ereignisse zunimmt:

$$H\left(\left[\frac{1}{L},...,\frac{1}{L}\right]\right) < H\left(\left[\frac{1}{L+1},...,\frac{1}{L+1}\right]\right)$$

Anforderungen IV

- Die Entropie eines Münzwurfes soll umso kleiner sein, je unfairer oder asymmetrischer die Münze ist, und ist maximal für einen fairen Münzwurf

$$p < q \leq 1/2 \Rightarrow H([p,1-p]) < H([q,1-q])$$

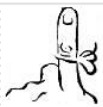
  - $H([p_1, \ldots, p_L])$ ist maximal, wenn $p_1 = \ldots = p_L = 1/L$

Anforderungen V

- Die Entropie eines Experimentes, welches aus zwei unabhängigen Einzelexperimenten besteht, soll gleich der Summe der Einzelentropien sein

$$H\left(\left[\frac{1}{LM},\ldots,\frac{1}{LM}\right]\right) = H\left(\left[\frac{1}{L},\ldots,\frac{1}{L}\right]\right) + H\left(\left[\frac{1}{M},\ldots,\frac{1}{M}\right]\right)$$

  - Wenn $L=M=1$, dann gilt $H(1)=0$



Die Entropie eines Experimentes mit nur einem einzigen möglichen Ausgang ist also 0. Sie enthält keine Information

Anforderungen VI

- Normierung: Es ist sinnvoll, die Entropie eines fairen Münzwurfs auf 1 zu normieren, da man ein Bit benötigt, um das Resultat darzustellen

$$H\left(\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)=1$$

- Glattheit: Kleine Änderungen in der Wahrscheinlichkeitsverteilung sollen nur kleine Änderungen in der Entropie bewirken

Definitionen

- Man kann zeigen, dass die einzige Funktion, welche alle diese Forderungen erfüllt, wie folgt definiert sein muss
- Definition 1: Die Entropie einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung $[p_1, \ldots, p_L]$ ist:

$$H([p_1, \ldots, p_L]) = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_2 p_i$$

Beispiel: Die Entropie der dreiwertigen Verteilung [0.7, 0.27655, 0.02345] ist 1 bit, wie beim fairen Münzwurf

- Besonders einfach ist die Entropieberechnung, wenn alle Wahrscheinlichkeiten negative Zweierpotenzen sind!

Definitionen

- Die Zufallsvariable X nehme die Zustände $\{x_1,\ldots,x_L\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_X(x_i)$ an
- Definition 2: Die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen X ist:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{L} p_X(x_i) \log_2 p_X(x_i)$$

  - Anmerkung: Auch für $L=\infty$ kann die obige Summe einen endlichen Wert annehmen
- Die Menge $\{x_1,\ldots,x_L\}$ aller Zustände von X nennen wir auch das Alphabet von X

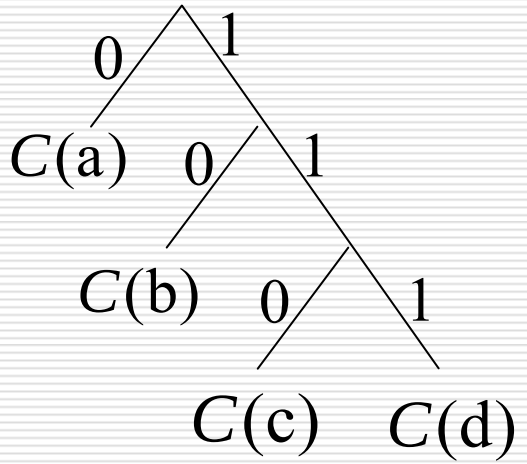
Informationsquelle 1

- Gegeben: Informationsquelle mit Alphabet {a,b,c,d}

$$p(\mathrm{a}) = \frac{1}{2} \quad p(\mathrm{b}) = \frac{1}{4} \quad p(\mathrm{c}) = \frac{1}{8} \quad p(\mathrm{d}) = \frac{1}{8}$$

- Ziel: möglichst optimale Codierung (Huffman)

$$C(\mathrm{a}) = 0$$
$$C(\mathrm{b}) = 10$$
$$C(\mathrm{c}) = 110$$
$$C(\mathrm{d}) = 111$$



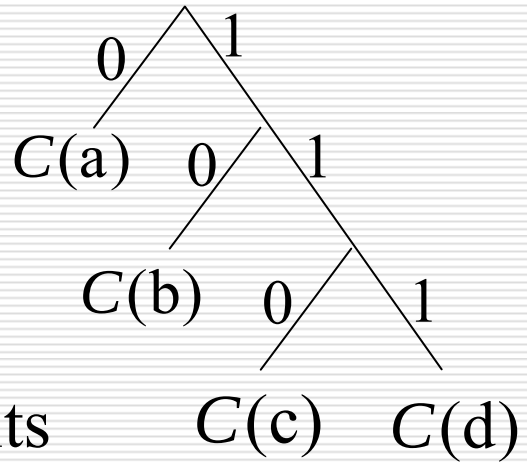
Informationsquelle 1

- Entropie:

$$E(X) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 \cdot 2 = 1.75 \text{ Bits}$$

- Mittlere Codelänge:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(C) &= E[l(C)] \\ &= \sum_{i=a}^{d} l(C(i)) \cdot p(C(i)) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 \cdot 2 = 1.75 \text{ Bits} \end{aligned}$$



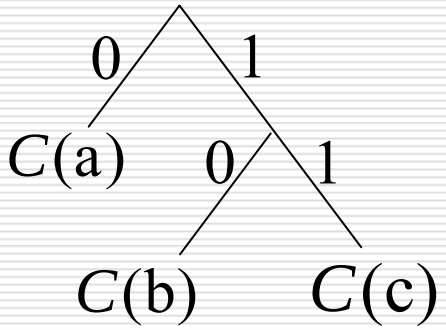
Informationsquelle 2

- Alphabet {a,b,c}

$$p(\mathrm{a}) = \frac{1}{3} \quad p(\mathrm{b}) = \frac{1}{3} \quad p(\mathrm{c}) = \frac{1}{3}$$

- $C(\mathrm{a}) = 0,\ C(\mathrm{b}) = 10,\ \ C(\mathrm{c}) = 11$
- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \log_2 3 = \log_2 3 = 1.58 \text{ Bits}$
- $L(C) = \sum_{i=a}^{c} l(C(i)) \cdot p(C(i))$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 1.66 \text{ Bits}$$



Anmerkungen

- Beides sind präfixfreie Codes

  acdaab = 01101110010

  ist eindeutig dekodierbar

- Minimale Anzahl Fragen zur Bestimmung von *X*
  - Ist *X*=a?
  - Ist *X*=b?

- Erwartungswert

$$H(X) < E[X] < H(X)+1$$

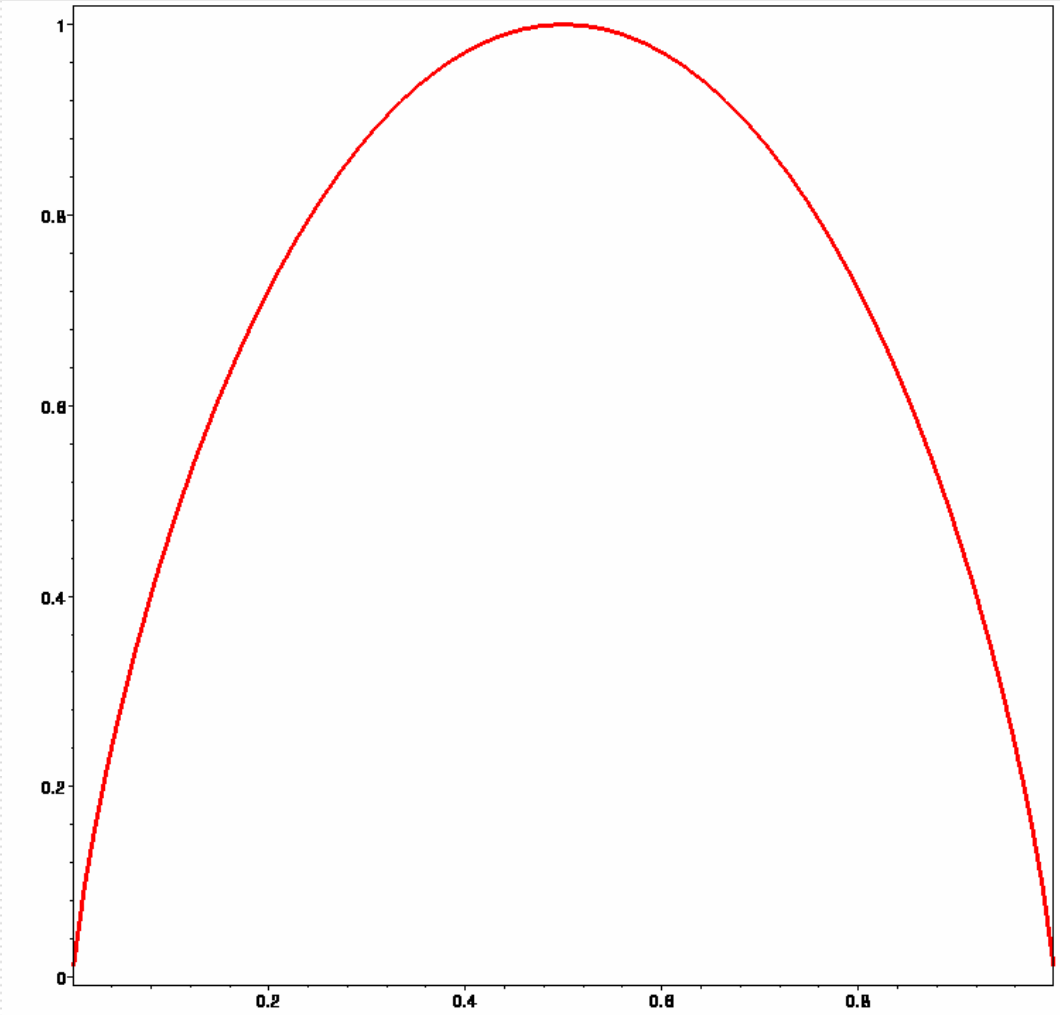
Binäre Entropiefunktion

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binären Zufallsvariablen X ist durch $p_X(0)=p$ vollständig beschrieben, da gilt: $p_X(1)=1-p$
- Die Entropie kann also als Funktion von p aufgefasst werden

$$h(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

- Sie ist für $0<p<1$ sowie $h(0)=h(1)=1$ definiert
- h(p) ist strikt konkav und besitzt ein Maximum bei $p=1/2$ (fairer Münzwurf)

Binäre Entropiefunktion



Entropie als Erwartungswert

- Anmerkung: Wir verwenden die Konvention

$$0 \cdot \log_2(0) = 0$$

- Dennoch gilt, dass Werte mit der Wahrscheinlichkeit 0 von der Betrachtung ausgeschlossen werden
- Dann kann die Entropie auch als Erwartungswert einer reellwertigen Funktion aufgefasst werden:

$$H(X) = E\left[-\log_2 P_X(X)\right]$$

Schranken für die Entropie

- Theorem: Es sei $\chi = \{x_1,\ldots,x_L\}$ die Menge der möglichen Zustände der Zufallsvariablen X.

  Dann gilt:

$$0 \le H(X) \le \log_2 |\chi|$$

  oder auch

$$0 \le H([p_1,\ldots, p_L]) \le \log_2 L$$

- Gleichheit gilt auf der linken Seite, wenn $p_X(x) = 1$ für genau ein x
- Gleichheit gilt auf der rechten Seite, wenn $p_1 = ,\ldots, = p_L = 1/L$

Beweis I

- Beweis: Der linke Teil der Ungleichung folgt direkt aus der Tatsache, dass die Funktion

$$f(x) = -x \log_2 x$$

für $0 < x < 1$ streng positiv ist und nur für $x = 1$ gemäss Konvention gleich 0 ist

- Die rechte Ungleichung folgt aus der Jensen-Ungleichung und der Tatsache, dass die Funktion

$$f(x) = \log_2 x$$

konkav ist

Beweis II

- Es gilt:

$$H(x) = E\left[\log_2 \frac{1}{P_X(X)}\right] \leq \log_2\left(E\left[\frac{1}{P_X(X)}\right]\right) = \log_2 |\mathcal{X}|$$

- Der letzte Schritt folgt aus

$$E\left[\frac{1}{P_X(X)}\right] = \sum_{i=1}^{L} P_X(X)\frac{1}{P_X(X)} = |\mathcal{X}|$$

- Konvention: Im Folgenden wird die Basis 2 für den Logarithmus angenommen und nicht mehr explizit geschrieben

Konvexität

- Definition: Eine Funktion $f(x)$ heisst konvex auf einem Intervall $[a,b]$, wenn für alle

$$x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2 \text{ und } \lambda \in [0,1] \quad \text{gilt:}$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

- Eine Funktion ist strikt konvex, wenn Gleichheit nur für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ gilt
- Eine Funktion f ist konkav, wenn $-f$ konvex ist
- Der Graph einer differenzierbaren, konvexen Funktion liegt immer oberhalb jeder Tangente

Konvexität

- Existiert $f''(x)$ einer Funktion f auf einem offenen oder geschlossenen Intervall $[a,b]$ und gilt $f''(x) > 0$, dann ist f konvex

Beweis Konvexität

- Taylorreihe von *f* um x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

- für $x^* \in [x_0 ... x]$ gilt $f''(x^*) \geq 0$

- sei $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$
- $x = x_1$

$$\rightarrow f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(1-\lambda)\cdot(x_1 - x_2) \,|\cdot\lambda$$

- $x = x_2$

$$\rightarrow f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)\cdot\lambda\cdot(x_2 - x_1) \,|\cdot(1-\lambda)$$

$$\oplus \rightarrow f(\lambda\cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2) \leq \lambda\cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$$

Jensen-Ungleichung

- Theorem: Für eine konvexe Funktion *f* und eine Zufallsvariable *X* gilt:

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

- Entsprechend gilt für eine konkave Funktion *g* und eine Zufallsvariable *X*

$$E[g(X)] \leq g(E[X])$$

Beweis Jensen-Ungleichung

- Wir gehen davon aus, dass *f* mindestens einmal differenzierbar ist
- Sei $ax+b$ die Tangente an *f* im Punkt $x=E[X]$
- Wir ersetzen die Funktion in *x* durch Ihre Tangente
- Dann gilt aufgrund der Linearität von *E*

$$f\left[E(X)\right] = aE\left[X\right] + b = E\left[aX + b\right] \leq E\left[f(X)\right]$$

- Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass der Graph der konvexen Funktion immer oberhalb der Tangente liegt

Verbund-Entropie

- Es sei (X,Y) ein Paar von Zufallsvariablen
- Die gemeinsame Entropie (Verbundentropie) zweier Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$H(XY) = -\sum_{(x,y)} p_{XY}(x,y) \log p_{XY}(x,y) = E\left[-\log p_{XY}(X,Y)\right]$$

- Theorem: Es gilt:

$$H(X) \leq H(XY)$$

- Gleichheit gilt genau dann, wenn Y durch Kenntnis von X eindeutig bestimmt ist, Y also keine neue Information enthält, also für ein y gilt

$$p_{Y|X}(x,y) = 1$$

Beweis Verbund-Entropie

- $H(X)$ und $H(XY)$ sind Erwartungswerte:

$$H(XY) = E\left[-\log p_{XY}(X,Y)\right]$$

- Im Rahmen der Verbundwahrscheinlichkeiten zweier Zufallsvariablen haben wir folgende Gesetzmässigkeit kennengelernt:

$$p_{XY}(x,y) \leq p_X(x)$$

- Dies gilt für alle möglichen Zustandspaare (x,y)

Verbund-Entropie

- Folgendes Theorem ist von zentraler Bedeutung:
- Theorem: Es gilt

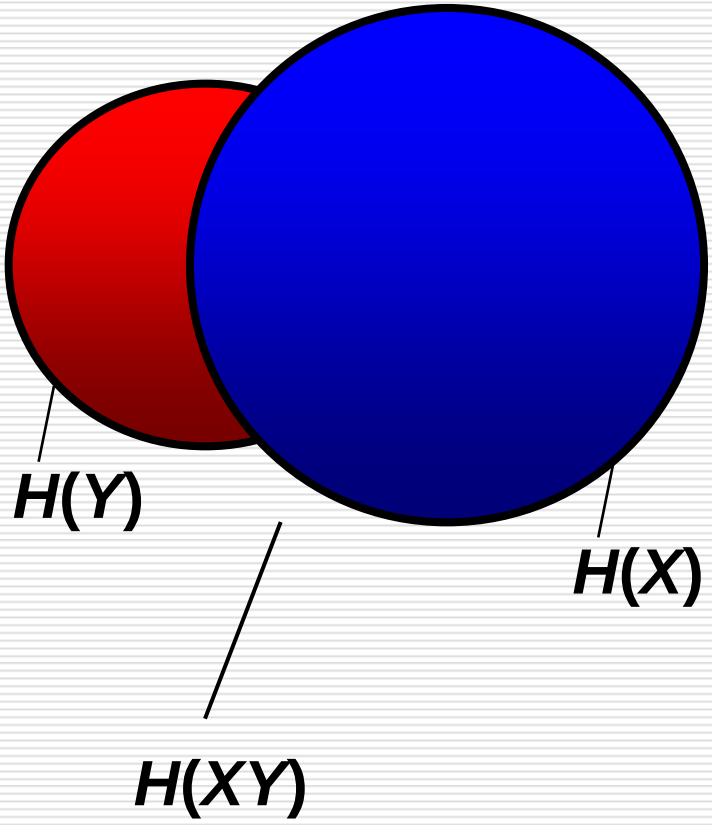
$$H(XY) \leq H(X) + H(Y)$$

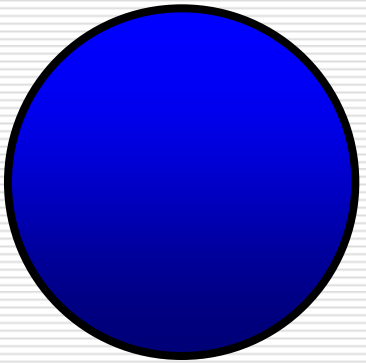
- Gleichheit gilt genau dann, wenn *Y* und *X* statistisch unabhängig sind
- Der Beweis erfolgt durch Einsetzen sowie Anwendung der Jensen-Ungleichung:

$$H(X) + H(Y) - H(XY) =$$
$$E\left[-\log p_X(X) - \log p_Y(Y) - \log p_{XY}(X,Y)\right]$$

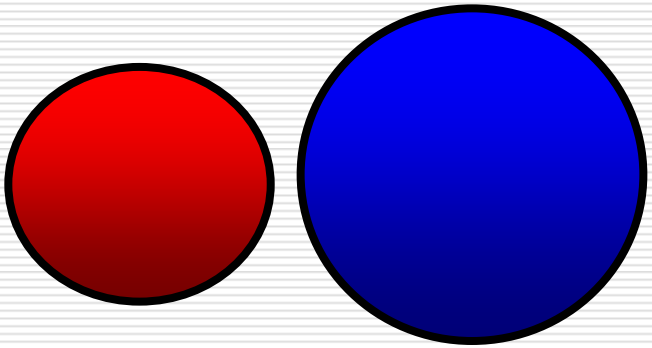
Die Entropie des Verbundereignisses *XY* ist höchstens so gross, wie die Summe der Entropien der Einzelereignisse.

Bild dazu





$H(XY)=H(X)$



$H(XY)=H(X)+H(Y)$