ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 05/06

Informationstheorie

Übung 8

Ausgabe: 9. Januar 2006
Abgabe: 16. Januar 2006

8.1 Shannon-Fano Codierung

a) Erstellen Sie mit Hilfe des Applets[1] den Shannon-Fano Code für die untenstehende Verteilung und berechnen Sie den Erwartungswert der Codelänge pro Zeichen.

X	P_X
a	0.10
b	0.15
c	0.34
d	0.17
e	0.05
f	0.09
g	0.10

b) Gegeben sei eine binäre Quelle mit unabhängigen Zeichen. Die Zeichen sind nach der untenstehenden Verteilung verteilt. Erstellen Sie von Hand einen Shannon-Fano Code und berechnen Sie den Erwartungswert der Codelänge pro Zeichen. Wie verhält sich der Erwartungswert im Vergleich zur Entropie? Wie gross ist die Coderedundanz R_C?

X	P_X
a	0.1
b	0.9

c) Betrachten Sie die gleiche Verteilung wie in 8.1.b. Nun werden aber immer zwei Zeichen zusammengefasst und anschliessend gemeinsam codiert (dies entspricht einer erweiterten Quelle mit m=2). Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die erweiterte Quelle an und berechnen Sie den Erwartungswert der Codelänge pro Zeichen des Anfangsalphabets. Wie gross ist nun die Coderedundanz R_C?

[1] http://graphics.ethz.ch/main.php?Menu=4&Submenu=6&Course=infotheory&Hornav=2

8.2 Arithmetische Codierung

a) Betrachten Sie folgendes Wahrscheinlichkeitsmodell für eine Quelle mit drei Buchstaben a, b und c:

Buchstabe	Wahrscheinlichkeit
a	50%
b	30%
c	20%

Bestimmen Sie mit arithmetischer Codierung ein mögliches Codewort für das Wort *aacbca*. Die Codierung ist nicht eindeutig. Geben Sie deshalb noch zusätzlich das Intervall an, aus welchem das Codewort gewählt werden kann.

b) Betrachten Sie die Verteilung von 8.2.a. Finden Sie das Wort der Länge 5, welches als 0.633 verschlüsselt wird.

c) Sei $x = x_1 x_2 ... x_m$ der zu codierende String und seien $u^{(m)}$ und $o^{(m)}$ die Unter- und Obergrenze des dazugehörigen Intervalls. In dieser Aufgabe wollen wir den Mittelpunkt des resultierenden Intervalls als Stellvertreter eines Wortes wählen. Die reellwertige Repräsentation ist folglich $\overline{T}(x_1 x_2 ... x_m) = \frac{o^{(m)} + u^{(m)}}{2}$.
Die binäre Darstellung der reellwertigen Repräsentation kann im Allgemeinen beliebig lang, bzw. unendlich sein. Um unsere reellwertige Repräsentation binär darzustellen, betrachten wir deswegen nur eine beschränkte Anzahl Bits nach dem Komma. Wir schneiden die binäre Zahl nach $l(x)$ Bits ab. Wobei $l(x) = \lceil \log \frac{1}{P(x)} \rceil + 1$ und $P(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Wortes x. Diese gekürzte Zahl nennen wir $\lfloor \overline{T}(x) \rfloor_{l(x)}$.

Zeigen Sie, dass diese gekürzte Repräsentation korrekt ist, indem Sie zeigen, dass sich $\lfloor \overline{T}(x) \rfloor_{l(x)}$ im Intervall $\left[u^{(m)}, o^{(m)}\right)$ des Strings x befindet.

8.3 Codierung der ganzen Zahlen

In den Vorlesungsfolien des Kapitels 9 wird eine Methode für die präfixfreie Codierung ganzer Zahlen vorgestellt.
(Siehe auch Skript Abschnitt 3.7.1)

a) Stellen Sie eine Tabelle der Codes C_1 und C_2 für die Zahlen von 1 bis 10 auf. Berechnen Sie auch $C_1(2^{19})$ und $C_2(2^{19})$.

b) Beim Code C_2 wird das erste Symbol „1“ des binären Codes B weggestrichen. Warum kann man als ersten Teil des Codewortes nicht einfach die um 1 reduzierte Länge codieren (mit C_1)?

c) Modifizieren Sie den Code C_2 so, dass er präfixfrei bleibt, aber für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit $P(1) < P(2) + P(3)$ besser ist als C_2.