Kapitel 4: Bedingte Entropie

Bedingte Entropie

- Das vorheriger Theorem kann durch mehrfache Anwendung direkt verallgemeinert werden

$$H(X_1X_2...X_N) \le \sum_{i=1}^{N} H(X_i)$$

- Ebenso kann die bedingt Entropie definiert werden
- Definition: Die bedingte Entropie von X, gegeben Y, ist

$$H(X|Y) = H(XY) - H(Y)$$

H(X|Y) ist also die restliche Unsicherheit über *X*, wenn *Y* bekannt ist

Bedingte Entropie

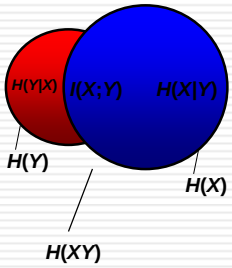
- Definition: Die gegenseitige Information, die X über Y gibt (sowie symmetrisch Y über X), ist

$$I(X;Y) := H(X) + H(Y) - H(XY)$$

- $I(X;Y)$ ist die Reduktion der Unsicherheit über X, wenn man Y erfährt

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= H(Y) - H(Y|X) = I(Y;X)$$

Bedingte Entropie



Bedingte Entropie

- Theorem: Es gilt:

$$0 \le H(X|Y) \le H(X)$$

- Mit Gleichheit links genau dann, wenn X durch Y vollständig bestimmt ist
- Die rechte Ungleichheit ist äquivalent zu

$$I(X;Y) \ge 0$$

- Also, mit Gleichheit rechts genau dann, wenn X und Y statistisch unabhängig sind
- Alle Definitionen und Aussagen gelten auch für Listen von Zufallsvariablen, wobei z.B.

$$H(RS|TUV) = H(RSTUV) - H(TUV)$$

Bedingte Entropie

- Durch wiederholte Anwendung der Definition erhalten wir die Kettenregel für Entropien:

$$H(X_1...X_N) = \sum_{i=1}^{N} H(X_i|X_1...X_{i-1})$$

- Oder auch

$$H(X_1...X_N|Y) = \sum_{i=1}^{N} H(X_i|X_1...X_{i-1}Y)$$

Man vergleiche dies mit den Formeln für die bedingten Wahrscheinlichkeiten zu Beginn von Modul 2 und wende den Logarithmus an.

$$P(X_1 \cdots X_N) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i|X_1 \ldots X_{i-1})$$

Reihenfolge der Variablen

- Wichtig ist, zu verstehen, dass die Reihenfolge, in der die Zufallsvariablen abgespalten werden, egal ist!

$$H(XYZ) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|XY)$$
$$H(XYZ) = H(X) + H(Z|X) + H(Y|XZ)$$
$$H(XYZ) = H(Y) + H(X|Y) + H(Z|XY)$$
$$H(XYZ) = H(Y) + H(Z|Y) + H(X|YZ)$$
$$H(XYZ) = H(Z) + H(X|Z) + H(Y|XZ)$$
$$H(XYZ) = H(Z) + H(Y|Z) + H(X|YZ)$$

Alternative Herleitung

- Die bedingte Entropie kann auch wie folgt hergeleitet werden
- Für ein Ereignis *A* mit Wahrscheinlichkeit *P(A)* können wir *H(X|A)* als die Entropie der bedingten Verteilung $p_{X|A}$ definieren

$$H(X|A) = -\sum_x p_{X|A}(x) \log p_{X|A}(x)$$

- Seien *X* und *Y* zwei Zufallsvariablen. Die bedingte Entropie *H(X|Y=y)* ist

$$H(X|Y=y) = -\sum_x p_{X|Y}(x,y) \log p_{X|Y}(x,y)$$

Alternative Herleitung

- *H(X|Y)* ergibt sich durch gewichtete Mittelwertbildung (Erwartungswert), also

$$H(X|Y) = \sum_y H(X|Y=y) p_Y(y)$$
$$= E\left[-\log P_{X|Y}(X,Y)\right]$$

- Die Ungleichung *H(Y|X) <= H(Y)* bedeutet, dass zusätzliche Information die Unsicherheit niemals erhöhen kann

Dennoch kann die Entropie *H(X|Y=y)* durchaus lokal grösser werden als *H(X)* *(siehe Beispiel)*

Bedingte Entropie (1)

- Zwei Zufallsvariablen haben folgende Verteilungen:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/8	1/16	1/32	1/32
2	1/16	1/8	1/32	1/32
3	1/16	1/16	1/16	1/16
4	1/4	0	0	0

- $P_X(x_i) = \sum_{j=1}^{4} P_{XY}(x_i, y_j) =$

x_i	1	2	3	4
	1/2	1/4	1/8	1/8

ebenso

$P_Y(y_j) =$

y_j	1	2	3	4
	1/4	1/4	1/4	1/4

Bedingte Entropie (2)

- x_i: 1 | 2 | 3 | 4 — 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/8, y_j: 1 | 2 | 3 | 4 — 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4

daraus folgt:

$H(X) = \frac{7}{4}\text{Bits}, \qquad H(Y) = 2\text{Bits}$

- $H(X|Y) = \sum_{j=1}^{4} P_Y(y_j) \cdot H(X|Y=y_j)$

$$= \frac{1}{4} \cdot H(X|Y=1) + \frac{1}{4} \cdot H(X|Y=2)$$
$$+ \frac{1}{4} \cdot H(X|Y=3) + \frac{1}{4} \cdot H(X|Y=4)$$

Bedingte Entropie (3)

- $H(X|Y=1) = -\sum_{i=1}^{4} P_{X|Y}(x_i,1) \cdot \log\left(P_{X|Y}(x_i,1)\right)$

$$\text{mit } P_{X|Y}(x_i,1) = \frac{P_{XY}(x_i,1)}{P_Y(1)}$$

$$x_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}, x_i = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}, x_i = 3 \Rightarrow \frac{1}{8}, x_i = 4 \Rightarrow \frac{1}{8}$$

- $\rightarrow H(X|Y=1) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{4}$

Bedingte Entropie (4)

- $H(X|Y) = \sum_{j=1}^{4} P_Y(y_j) \cdot H(X|Y=y_j)$

$$= \frac{1}{4} \cdot H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot H\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$$
$$+ \frac{1}{4} \cdot H\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot H(1,0,0,0)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{11}{8}\text{Bits}$$

- $H(Y|X) = \frac{13}{8}\text{Bits}$ und $H(X|Y) = \frac{11}{8}\text{Bits}$

$H(Y|X) \neq H(X|Y)$, jedoch gilt immer:

$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = I(X,Y) = 3/8 Bits$

Bedingte binäre Entropie (1)

- Seien X und Y zwei binäre Zufallsvariablen {0,1}
- $P_{XY}(0,1) = P_{XY}(1,0) = P_{XY}(0,0) = \frac{1}{3}$, $P_{XY}(1,1) = 0$
- $H(X|Y=0) = -\sum_{X\in\{0,1\}} P_{X|Y}(x,0) \cdot \log\left(P_{X|Y}(x,0)\right)$

$$P_{X|Y}(x,0) = \frac{P_{XY}(x,0)}{P_Y(0)}$$

$$P_{X|Y}(0,0) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2},\quad P_{X|Y}(1,0) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

- $H(X|Y=0) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\text{ Bit}$

Bedingte binäre Entropie (2)

- $H(X) = -\sum_{X\in\{0,1\}} P_X(x) \cdot \log\left(P_X(x)\right)$

$$P_X(0) = \frac{2}{3},\quad P_X(1) = \frac{1}{3}$$

- $H(X|Y=1) \Rightarrow P_{X|Y}(x,1) = \frac{P_{XY}(x,1)}{P_Y(1)}$

$$P_{X|Y}(0,1) = \frac{1/3}{1/3} = 1,\quad P_{X|Y}(1,1) = 0$$

- $\rightarrow H(X|Y=1) = 0$

$\rightarrow H(X|Y=1) < H(X) < H(X|Y=0)$

Bedingte binäre Entropie (3)

- $\rightarrow H(X|Y) = P_Y(0) \cdot H(X|Y=0) + P_Y(1) \cdot H(X|Y=1)$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1\text{ Bit} + \frac{1}{3} \cdot 0\text{ Bits}$$
$$= \frac{2}{3}\text{ Bit} < H(X)$$

Die Entropie kann lokal ansteigen, Fällt jedoch im Durchschnitt immer

Mehrere Variablen

- Entsprechend gilt für 3 Zufallsvariablen

$$H(X|YZ) = -\sum_{z} H(X|Y,Z=z)\, p_Z(z)$$

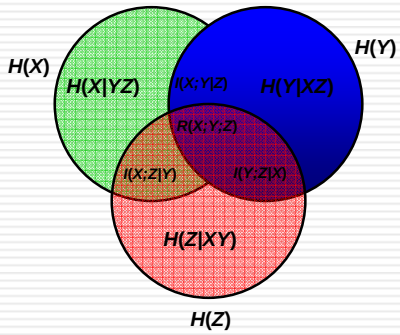
- wobei

$$H(X|Y,Z=z) = -\sum_{(x,y)} p_{XY|Z}(x,y,z) \log p_{XY|Z}(x,y,z)$$

Bedingte Information

- Wir erweitern unser Diagramm um eine weitere Variable
- Wir erhalten 7 Bereiche
- Jeder Bereich entspricht einer Kombination von 7 Verbundentropien $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, $H(XY)$, $H(XZ)$, $H(YZ)$, $H(XYZ)$
- 3 der Bereiche haben bereits eine Interpretation
- Bedingte Entropien $H(X|YZ)$, $H(Y|XZ)$, $H(Z|XY)$
- Wir wollen die übrigen Bereiche kennen lernen
- Siehe Bild

Bild



Interpretation

- Die bedingten Informationen $I(X;Y|Z)$, $I(Y;Z|X)$, $I(X;Z|Y)$ können wie folgt interpretiert werden:
- Definition: Die bedingte, gegenseitige Information, die X über Y gibt, gegeben Z, ist

$$I(X;Y \mid Z) := H(XZ) + H(YZ) - H(XYZ) - H(Z)$$

- Oder auch

$$I(X;Y \mid Z) := H(X \mid Z) - H(X \mid YZ)$$

- $I(X;Y|Z)$ ist also die Reduktion der Unsicherheit über X, wenn man Y erfährt, wobei aber Z schon bekannt ist
- Man interpretiere $R(X;Y;Z)$ (kann negativ sein)

$$R(X;Y;Z) := H(X) + H(Y) + H(Z) - H(XY) - H(XZ) - H(YZ) + H(XYZ)$$

Interpretation

- Theorem: Es gilt

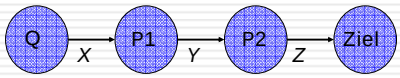
$$I(X;Y \mid Z) \geq 0$$

- Die Aussage, dass Zusatzinformation die Entropie nicht vergrössern kann, gilt jedoch nicht für $I(X;Y|Z) > I(X;Y)$, da $R(X;Y;Z)$ negativ werden kann
- Z bewirkt in diesem Falle eine stärkere Reduktion von $H(X|Y)$, als von $H(X)$
- Hierbei gilt:

$$H(X \mid Y) - H(X \mid YZ) > H(X) - H(X \mid Z)$$

Mit Hilfe von Entropien kann intuitiv gerechnet werden. Wir betrachten zwei Beispiele

Beispiel 1: Markov-Kette



- Wir betrachten folgende Markov-Kette
- P1 und P2 sind Prozessoren, die Berechnungen durchführen
- X wird durch P1 in Y übergeführt usw.
- P1 und P2 können beliebige deterministische oder probabilistische Operationen durchführen
- Einschränkung: Kein versteckter Pfad von X nach Z, also Markov-Eigenschaft

Beispiel 1: Markov-Kette

- Dies ist, wie bekannt, gleichbedeutend mit

$$p_{Z|XY}(x,y,z) = p_{Z|Y}(y,z)$$

- Mittels Entropie wird daraus

$$H(Z \mid XY) = H(Z \mid Y)$$

- oder auch

$$I(Z;X \mid Y) = 0$$

- Es gilt die Symmetrie-Eigenschaft

$$I(Z;X \mid Y) = I(X;Z \mid Y)$$

- Und damit die Umkehrbarkeit der Markov-Kette, also $X->Y->Z$ sowie $Z->Y->X$

Beispiel 1: Markov-Kette

- Lemma (Informationsverarbeitung):
  Falls $X->Y->Z$, dann gelten

$$I(X;Z) \leq I(Y;Z), \text{ sowie } I(X;Z) \leq I(X;Y)$$

- Beweis: Es gilt

$$I(Y;Z) = R(X;Y;Z) + I(Y;Z \mid X)$$

- Und

$$I(X;Z) = R(X;Y;Z) + I(X;Z \mid Y)$$

- Also gilt

$$I(Y;Z) - I(X;Z) = I(Y;Z \mid X) - I(X;Z \mid Y) = I(Y;Z \mid X) \geq 0$$

Es gibt keine Operation auf Y, die die Information erhöhen kann, welche Y über X enthält

Perfekte Verschlüsselung

- Ein Klartext *M* soll mit einem geheimen Schlüssel *K* zu einem Chiffrat *C* verschlüsselt werden
- Empfänger kann mit Schlüssel den Code entschlüsseln
- Definition: Ein Verschlüsselungsverfahren heisst perfekt sicher, wenn

$$I(M;C) = 0 \Leftrightarrow P(M \mid C) = P(M)$$

- Bedeutung: Auch mit unbegrenzten Rechenressourcen ist der Code nicht zu knacken!
- Stärkste (theoretische) Sicherheit

Perfekte Verschlüsselung

- Theorem: In einem perfekt sicheren Verschlüsselungssystem gilt:

$$H(K) \geq H(M)$$

- Aufgrund der Entschlüsselbarkeit von *M* mit *C* und *K* gilt:

$$H(M \mid CK) = 0$$

- Perfekte Sicherheit bedeutet $b = -a$ im Bild
- Wir erinnern uns, dass $b < 0$ möglich ist
- Umgekehrt ist auch

$$I(C;K) \geq 0 \Rightarrow c \geq -b = a$$

- $H(K) >= H(M)$ folgt aus Vergleich der Regionen

Bild dazu