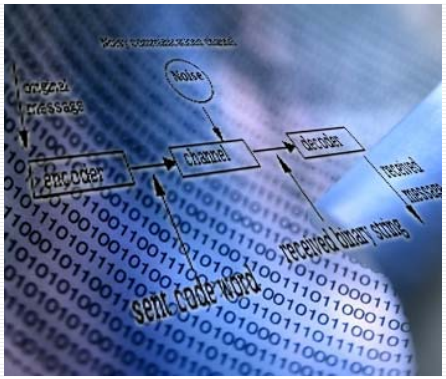
Kapitel 9: Intervalllängencodierung



Ziele des Kapitels

ETH

- Universelle Datenkompression
- Codes für ganze Zahlen
- Intervalllängen-Codierung

Shannon-Fano Coding

ETH

- Problem bisher: statistische Eigenschaften der Quelle müssen bekannt sein
- Besser: Verfahren, welche sich auf die Eigenschaften der Quelle adaptieren
- Definition: Ein Verfahren heisst universell für eine gegebene Klasse von Informationsquellen, wenn es asymptotisch jede Quelle dieser Klasse auf die Entropierate codiert
- Asymptotisch bezieht sich hierbei auf die Wahl von Parametern, wie z.B. die Blocklänge

Code für ganze Zahlen

ETH

- Wir betrachten im Folgenden eine universelle Codierung für eine beliebige stationäre Quelle der Form $X = X_1, X_2, \ldots$.
- Wir betrachten keine spezielle Zahlenstatistik
- Die Folge X wird in Blöcke der Länge L unterteilt
- Zunächst betrachten wir dazu eine präfixfreie Codierung für ganze Zahlen j, d.h. $j \in \mathbb{N}^+$
- Die „normale“ binäre Codierung von j, $B(j)$ hat die Länge $L(j)$

$$L(j) = \lfloor \log_2 j \rfloor + 1$$

- $B(j)$ ist nicht präfixfrei!

Code für ganze Zahlen

ETH

- Um einen präfixfreien Code C_1 zu erhalten, können wir dem Codewort $B(j)$ eine Folge von $L(j)$-1 Symbolen „0“ voranstellen

$$C_1(j) = 0^{L(j)-1} \| B(j)$$

- Die resultierende Länge $L_1(j)$ ist

$$L_1(j) = 2L(j) - 1 = 2\lfloor \log_2 j \rfloor + 1$$

- Dieser Code ist nicht optimal
- Verbesserung durch Ersetzen der $L(j)$-1 führenden „0“ mit präfixfreier Codierung von $L(j)$, also der Länge
- Dazu verwenden wir z.B. $C_1(j)$

Code für ganze Zahlen

ETH

- Da jedes Codewort in $B(j)$ immer mit einer „1“ beginnt, kann diese weggelassen werden
- Der resultierende Code sei B'
- Wir erhalten als präfixfreie Codierung für die ganzen Zahlen somit

$$C_2(j) = C_1(L(j)) \| B'(j)$$

- Die Länge $L_2(j)$ von $C_2(j)$ ist also

$$L_2(j) = L_1(L(j)) + L(j) - 1 =$$
$$2\lfloor \log_2(\lfloor \log_2 j \rfloor + 1) \rfloor + \lfloor \log_2 j \rfloor + 1$$

Das obige Prinzip ist klar rekursiv und kann entsprechend verallgemeinert werden

Code für ganze Zahlen

ETH

- j = 37

$$\rightarrow B(j) = 100101$$
$$\rightarrow L(37) = 6$$
$$\rightarrow C_1(37) = 0^5 \| B(j) = 00000100101$$
$$\rightarrow C_1(L(37)) = C_1(6) = 00110$$
$$\rightarrow L_1(37) = 11$$
$$\rightarrow C_2(37) = C_1(L(37)) \| B'(37)$$
$$= 00110 \| 00101$$
$$= 0011000101$$
$$\rightarrow L_2(37) = 10$$

- Lang, jedoch gut für grosse Zahlen $L_2(10^6) = 28$

Verallgemeinerung

ETH

- Man verwende einen beliebigen, nicht degenerierten Code C für die Zahlen in $\aleph^+$
- Man verwende einen präfixfreien Code für $\aleph^+$, um die Länge des Codewortes zu codieren
- Dieser Code wird dem Codewort vorangestellt
- Als trivialen präfixfreien Code für $\aleph^+$ nehmen wir $C'(j) = 0^j 1$
- Der so erhaltene präfixfreie Code kann wiederum zur Codierung der Längen verwendet werden
- Wir erhalten eine asymptotisch immer effizienter werdende Codierung der Zahlen $j \in \aleph^+$

Rekursion

- Bei Verwendung der vorherigen Codes für $B(j)$ und $B'(j)$ erhalten wir folgende Rekursionsformel:

$$C^n(j) = \begin{cases} 0^{j-1}1 & \text{für } n = 0 \\ C^{n-1}(L(j)) \| B'(j) & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

- Diese ist nicht mehr von der Quellenstatistik abhängig
- Es zeigt sich, dass durch rekursive Anwendung asymptotisch optimale Codes entworfen werden können

Intervalllängen-Codierung

- Eine sehr effiziente Codierung für stationäre binäre Quellen $X = X_1, X_2, \ldots$ mit starker Asymmetrie
- Es seien $P_{X_i}(0) = 1 - p \qquad P_{X_i}(1) = p$
- Für alle $i >= 1$ und $p << 1/2$
- Eine lange Folge solcher Zufallsvariablen wird codiert, indem nur die Abstände aufeinanderfolgender „1“ Symbole codiert werden
- Man verwendet einen präfixfreien Code für ganze Zahlen
- Wir verwenden einfach $C_2(j)$

Intervalllängen-Codierung

- Wichtig für die folgende Analyse ist ein Code, bei dem gilt

$$\lim_{j \to \infty} \frac{L(j)}{\log_2 j} = 1$$

- Zur Abschätzung der Codewortlängen verwenden wir

$$L_2(j) \le \tilde{L}_2(j) := 2\log_2(\log_2 j + 1) + \log_2 j + 1$$

- Wir setzen weiterhin $X_0 = 1$ als Initialisierung
- Wir berechnen den Erwartungswert des Abstandes zweier „1“-Symbole
- Der Abstand zwischen dem i-ten und $i+1$-tem „1“-Symbol sei $D^{(i)}$

Intervalllängen-Codierung

- Es ergibt sich für den Erwartungswert bis zum M-ten Auftreten einer „1“

$$E\left[\sum_{i=1}^{M} D^{(i)}\right] = \sum_{i=1}^{M} E\left[D^{(i)}\right] = M \cdot E[D]$$

- Dies gilt aufgrund der Stationarität, welche den Erwartungswert zeitkonstant hält
- Die relative Häufigkeit eines „1“-Symbols einer Folge von der Länge N ist

$$\frac{E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E[X_i]}{N} = E[X_i] = p$$

Intervalllängen-Codierung

ETH

- Somit gilt:

$$E[D] = \frac{1}{p}$$

- Die mittlere Distanz zwischen zwei „1“ Symbolen ist also reziprok zu deren Auftretenswahrscheinlichkeit
- $E[D]$ ist die mittlere Anzahl von Zufallsvariablen, die mit einem Codewort codiert werden
- Die mittlere Anzahl von Bits pro Codewort ist

$$E[L_2[D]] = \sum_{d=1}^{\infty} P_D(d) L_2(d)$$

Intervalllängen-Codierung

ETH

- Die Funktion L_2 ist konkav. Anwenden der Jensen-Ungleichung

$$E[L_2(D)] \le E[\tilde{L}_2(D)] \le \tilde{L}_2(E[D]) = \tilde{L}_2(1/p)$$

- Die mittlere Anzahl von Bits pro Zufallsvariable ist also

$$\frac{E[L_2(D)]}{E[D]} = p\tilde{L}_2(1/p) = 2p\log_2(1-\log_2 p) - p\log_2 p + p$$

- Die Effizienz dieser Codierung ist für p gegen 0 optimal
- Wir erhalten $\lim_{p\to 0} \frac{E[L_2(D)]}{E[D]} = h(p)$

Verallgemeinerung

ETH

- Wir erweitern die Betrachtung auf nicht gedächtnisfreie, Q-äre Quellen
- Das Alphabet sei $\{y_1,\ldots,y_Q\}$
- Die Quelle sei $\boldsymbol{Y} = Y_1, Y_2, \ldots$ *mit* $P_{Y1} = P_{Y2} = \ldots = P_Y$
- Wesentlicher Unterschied: Jedes Symbol y muss bezüglich des letzten Auftretens des gleichen Symbols codiert werden
- Initialisierung, wie vorher, so dass

$$Y_i = y_{1-i} \quad \text{für} \quad i = -Q+1,\ldots,0$$

- Sei D_i der Abstand zwischen dem Symbol an der i-ten Stelle (Y_i) und seinem nächsten Auftreten

Verallgemeinerung

ETH

- Bei $Y_i = y$ ist die Verteilung gleich wie im binären Fall, mit $p = P_Y(y)$
- Voraussetzung: Alle Symbole wurden bereits einmal übertragen
- Es gilt

$$E[D_i \mid Y_i = y] = \frac{1}{P_Y(y)}$$

- Anwendung der Jensen-Ungleichung

$$E[L_2(D_i) \mid Y_i = y] \le E[\tilde{L}_2(D_i) \mid Y_i = y] \le \tilde{L}_2(E[D_i \mid Y_i = y]) \le \tilde{L}_2\left(\frac{1}{P_Y(y)}\right)$$

- Nun muss noch über alle Werte von y gemittelt werden

Code für ganze Zahlen

ETH

- Wir wenden erneut die Jensen-Ungleichung an

$$E[L_2(D_i)] = \sum_{y \in \chi} P_Y(y) E[L_2(D_i) \mid Y_i = y] \leq \sum_{y \in \chi} P_Y(y) \tilde{L}_2(\frac{1}{P_Y(y)})$$

- Wir erhalten schliesslich

$$E[L_2(D_i)] \leq H(Y) + 2\log E[\log(\frac{1}{P_Y(y)}) + 1] + 1$$

$$= H(Y) + 2\log(H(Y) + 1) + 1$$

Man sieht, dass diese Intervall-Längencodierung für grosse $H(Y)$ nahezu asymptotisch optimal ist, wenn $H(Y)$ zunimmt. Man nähert sich also der Quellenentropie $H(Y)$.

Fazit

ETH

- Die beschriebene Methode lässt sich hinsichtlich Blocklängencodierung erweitern
- Wir unterteilen die Zeichenfolge der Quelle ***X*** in nicht-überlappende Blöcke der Länge *L*
- Diese Folge von Blöcken stellt eine Ersatzquelle dar
- Wir wenden die Lauflängencodierung auf die neue Quelle an und erhalten

$$\lim_{p \to 0} \frac{E[L_2(D_i)]}{L} = H(X)$$

Es gibt keine universellen Kompressionsverfahren, die jede Quelle auf die Entropie komprimieren.
Die Behauptung, ein Programm komprimiere jeden Input auf x% ($0 < x < 100$), ist Unsinn.