ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

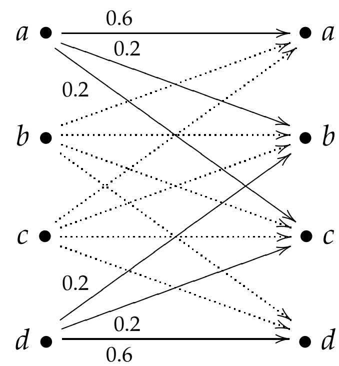
Informationstheorie

Übung 10

Ausgabe: 15. Januar 2007

10.1 Decodierung (VD Herbst 2003)

Betrachten Sie folgenden Kanal mit 4 Inputsymbolen und 4 Outputsymbolen:



Die gestrichelten Pfeile haben jeweils Wahrscheinlichkeit 1/4.
Um ein Bit über diesen Kanal zu übertragen, wird folgende Codierung verwendet:

$$0 \Rightarrow abcd \qquad\qquad 1 \Rightarrow dcba$$

Sei p_0 die Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 gesendet wird.

a) Wie gross ist die Rate dieses Codes?

b) Wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit eines ML-Decoders, falls $p_0 = 1/2$?
Tip: Diese Aufgabe erfordert keine aufwendige Rechnung.

c) Es sei $p_0 \leq 1/2$. Wie gross darf p_0 maximal sein, damit ein ME-Decoder eine Fehlerwahrscheinlichkeit von ε nicht überschreitet?

10.2 Minimaldistanz

a) Sei $C_1 := \{010101, 000111, 111000, 010010\}$ ein Code in $GF(2)^6$. Was ist die Minimaldistanz dieses Codes? Wieviele Fehler können bei diesem Code erkannt, wieviele korrigiert werden?

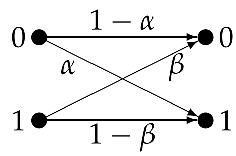
b) Sei C_2 der Code, der aus allen Linearkombinationen von Codewörtern in C_1 besteht. Kann C_2 auch als die Menge von Linearkombinationen von nur drei Codewörtern beschrieben werden?

c) Wie gross ist die Minimaldistanz von C_2? Gibt es ein Codewort, dessen Hamminggewicht genau die Minimaldistanz ist?

d) C_2 ist ein linearer Unterraum von $GF(2)^6$. Beweisen Sie, dass es in jedem Code, der als linearer Unterraum von $GF(2)^n$ aufgefasst werden kann, ein Codewort gibt, dessen Hamminggewicht die Minimaldistanz des Codes ist. Zeigen Sie ferner, dass ausser dem Codewort $\mathbf{0} := 00\ldots0$ kein Codewort ein kleineres Hamminggewicht haben kann.

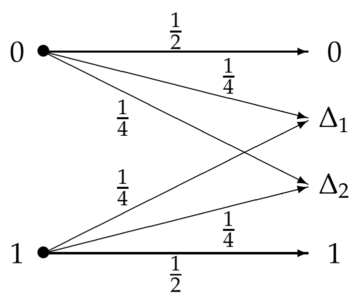
10.3 Kapazität des allgemeinen binären Kanals

Geben Sie für einen *allgemeinen binären Kanal* mit Fehlerwahrscheinlichkeiten α and β (siehe Figur) eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass seine Kapazität 0 ist.



10.4 Kanäle und Kapazität (VD-Aufgabe Herbst 2001)

a) Berechnen Sie die Kapazität des folgenden Kanals (siehe Skizze): Das Symbol 0 wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf 0 abgebildet, 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf 1, und beide Inputsymbole werden je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ auf Δ_1 oder Δ_2 abgebildet. (Lösungsweg angeben!)



b) Konstruieren Sie einen Kanal K mit Inputalphabet $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$, Outputalphabet $\mathcal{Y} = \{1,2,3,4\}$ und Kapazität $C = 1$.

c) Konstruieren Sie einen Kanal K mit Inputalphabet $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$, Outputalphabet $\mathcal{Y} = \{1,2,3,4\}$ und Kapazität $C = 1$, so dass der Kanal K', der aus der Hintereinanderschaltung zweier Kanäle K besteht (siehe Abbildung), Kapazität $C' = 0$ hat.