ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

computer graphics lab

Prof. Markus Gross
Remo Ziegler / Christian Vögeli / Daniel Cotting

Visual Computing
Transformationen mittels Matrizen und Quaternionen

Musterlösung

1) Theoretische Aufgabe (aus GDV-Prüfung 2005)

a) Kurzaufgaben

I. *Zwischen welchen drei Koordinatensystemen unterscheidet man bei der Szenenbeschreibung?*
- Objektkoordinaten
- Weltkoordinaten
- Kamerakoordinaten

II. *In welche zwei Klassen können planare geometrische Projektionen eingeteilt werden?*
- parallele Projektionen
- perspektivische Projektionen

III. *Worin unterscheiden sich oblique Projektionen von orthographischen Projektionen?*
Die Projektionsarten unterscheiden sich bezüglich des Verhältnisses der Richtung der Projektion und der Richtung des Normalenvektors der Projektionsebene. Stimmen die Projektionsrichtung und die Richtung der Normalen überein, handelt es sich um eine orthographische Projektion. Bei einer obliquen Projektion stimmen die Richtungen nicht überein.

IV. *Nennen Sie einen Vorteil, der sich durch den Einsatz homogener Koordinaten ergibt*.
- Alle Transformationen können einheitlich als Matrixoperationen dargestellt werden.
- Hintereinander ausgeführte affine und projektive Abbildungen können in einer einzigen Matrix zusammengefasst werden.

V. *Gegeben seien zwei homogene Punkte* $P_1 = [4\ 3\ 2\ 1]^T$ *und* $P_2 = [1\ 2\ 3\ 4]^T$.

Geben Sie den euklidschen Verbindungsvektor $\mathbf{d} \in \Re^3$ *an, der von* P_1 *nach* P_2 *führt.*

Um P_1 und P_2 in $\Re^3$ zu vergleichen, müssen sie zuerst homogenisiert werden. Die Homogenisierung erfolgt durch Division durch W, welches der vierten Koordinate der Punktvektoren entspricht. Die homogenisierten Vektoren sind $P_1' = [4\ 3\ 2]^T$ und $P_2' = (1/4)[1\ 2\ 3]^T$.

In $\Re^3$ ist demnach der Verbindungsvektor $\mathbf{d} = P_2' - P_1' = -\frac{1}{4}[15\ 10\ 5]^T$.

b) Homogene Transformationen

I. *Zerlegen Sie die Abbildungsmatrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 47 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in eine lineare Abbildung L *und eine Translation* T*, so dass* $A = LT$*. (Beachte: nicht* $A = TL$*!)*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -47 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II. *Geben Sie jeweils eine anschauliche Interpretation für die Abbildungen* L *und* T *an. Welche Art lineare Abbildung beschreibt* L*?*

- L ist eine Rotation von 90° um die z-Achse. ($\sin(90^\circ) = 1, \cos(90^\circ) = 0$)
- T ist eine Verschiebung um $\begin{bmatrix} 11 & -47 & 0 \end{bmatrix}^T$

III. *In welcher Reihenfolge werden* L *und* T *ausgeführt, wenn* A *auf einen Punkt angewandt wird?*
Der Punkt wird zuerst um T verschoben, dann mit L rotiert.

IV. *Es sei* $n = [a\ b\ c\ d]^T$ *die Normale einer Ebene* H *in Hesse-Normalform. Für alle Punkte* $\mathbf{p} \in H$ *gilt also* $\mathbf{n} \bullet \mathbf{p} = 0$*. Die obige Abbildung* A *bilde nun alle* $\mathbf{p} \in H$ *auf Punkte* $\mathbf{p}'$ *einer zweiten Ebene* H' *ab (*$\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$*).*

Geben Sie eine Matrix $\tilde{A}$ *an, die* $\mathbf{n}$ *auf die Normale* $\mathbf{n}'$ *der Ebene* H' *in Hesse-Normalform abbildet (*$\mathbf{n}' = \tilde{A}\mathbf{n}$*). Berechnen Sie* $\tilde{A}$ *mit Hilfe der Zerlegung* $A = LT$*!*

Für die Punkte $\mathbf{p}'$ und den Normalenvektor $\mathbf{n}'$ muss wiederum gelten, dass $\mathbf{n}' \bullet \mathbf{p}' = 0$. In Matrixschreibweise ist dies $(\tilde{A}\mathbf{n})^T \cdot (A\mathbf{p}) = \mathbf{n}^T\tilde{A}^T \cdot A\mathbf{p} = 0$. Daraus folgt

$$\tilde{A} = (A^{-1})^T = ((LT)^{-1})^T = (T^{-1}L^{-1})^T = L(T^{-1})^T = L\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 47 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Quaternionen

I. *Stellen Sie das Einheitsquaternion* $q = c + xi + yj + zk$ *auf, das eine Rotation von 60° um die Achse* $[3\ 0\ 4]^T$ *beschreibt. Vereinfachen Sie das Quaternion so weit wie möglich.*
Die Rotation eines beliebigen Punktes $\boldsymbol{P}$ in 3D um den Winkel φ über die Achse $\boldsymbol{N}$ **wird beschrieben durch die Quaternionenoperation** $R_q(p) = qp\bar{q}$, wobei der Punkt $\boldsymbol{P}$ durch das reine Quaternion p dargestellt wird und q ein Einheitsquaternion ist. q kann geschrieben werden als $q = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)n$, wobei n die Rotationsachse beschreibt mit $\|n\| = 1$. Wir erhalten

$$n = \frac{[3\ 0\ 4]}{\|[3\ 0\ 4]\|} = [0.6\ 0\ 0.8]$$

somit $$q = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)n = \cos(30) + \sin(30)n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}(3i + 0j + 4k)$$

$$q = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ 0.3\ \ 0\ 0.4\right]$$

II. *Berechnen Sie direkt aus* q *das zugehörige Quaternion der inversen Rotation.*

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\bar{q} = 1 \cdot \bar{q} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ -0.3\ \ 0\ -0.4\right]$$

III. *Welche elementare Quaternionenoperation haben Sie in II. benutzt?*
Mögliche Antworten: Inversion, Inversion des Einheitsquaternions, Konjugation

IV. *Gegeben sei das Quaternion* $r = [c\ x\ y\ z] = [0\ 1\ 0\ 0]$. *Mit welcher Rotation korrespondiert* r*?*
r korrespondiert mit einer Rotation von 180° um die x-Achse.

V. *Geben Sie die mit* r *korrespondierende Rotationsmatrix an.*

$$\cos 180° = -1,\ \sin 180° = 0 \Rightarrow R_x(180°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$